模块二 三角恒等变换

第 1 节 和差角、辅助角、二倍角公式（★★☆）

强化训练

1．（2022·南充模拟·★★）锐角 α 满足 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{10}}{10}$，则 $\cos(2\alpha+\frac{\pi}{6})=$______.

答案：$\frac{4\sqrt{3}-3}{10}$

解析：由题意，$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，所以 $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{3}{5}$，$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=\frac{4}{5}$，

所以 $\cos(2\alpha+\frac{\pi}{6})=\cos 2\alpha\cos\frac{\pi}{6}-\sin 2\alpha\sin\frac{\pi}{6}=\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{4\sqrt{3}-3}{10}$.

2．（2022·安徽模拟·★★）若 α 是第二象限的角，且 $\sin(\pi-\alpha)=\frac{3}{5}$，则 $\tan 2\alpha=$_____.

答案：$-\frac{24}{7}$

解析：由题意，$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha=\frac{3}{5}$，又 α 是第二象限的角，所以 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{4}{5}$，

从而 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{3}{4}$，故 $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=-\frac{24}{7}$.

3．（2022·北京模拟·★★★）若 $\cos(\pi-\alpha)=-\frac{\sqrt{10}}{10}$，$\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，$\tan(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}$，则 β 可以为______.（写出一个满足条件的 β）

答案：$-\frac{\pi}{4}$（答案不唯一，满足 $\beta=k\pi-\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$ 的 β 均可）

解析：先用诱导公式把 $\cos(\pi-\alpha)$ 化简，$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha=-\frac{\sqrt{10}}{10}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{\sqrt{10}}{10}$，

又 $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，所以 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，故 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=3$，

我们要写出一个 β，可以先计算 $\tan\beta$，直接把已知的 $\tan(\alpha+\beta)$ 展开即可，

由题意，$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{3+\tan\beta}{1-3\tan\beta}=\frac{1}{2}$，解得：$\tan\beta=-1$，所以 $\beta=k\pi-\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$.

4．（2021·全国乙卷·★★）$\cos^2\frac{\pi}{12}-\cos^2\frac{5\pi}{12}=$（　）

（A）$\frac{1}{2}$　（B）$\frac{\sqrt{3}}{3}$　（C）$\frac{\sqrt{2}}{2}$　（D）$\frac{\sqrt{3}}{2}$

答案：D

解法 1：两项都有平方，可降次，且降次后恰好都化为特殊角，

由题意，$\cos^2\frac{\pi}{12}-\cos^2\frac{5\pi}{12}=\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}-\frac{1+\cos\frac{5\pi}{6}}{2}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}-\frac{1+(-\frac{\sqrt{3}}{2})}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

解法 2：注意到$\frac{\pi}{12}+\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{2}$，故用诱导公式将角统一成$\frac{\pi}{12}$，可利用倍角公式求值，

由题意，$\cos^2\frac{\pi}{12}-\cos^2\frac{5\pi}{12}=\cos^2\frac{\pi}{12}-\cos^2(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12})=\cos^2\frac{\pi}{12}-\sin^2\frac{\pi}{12}=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

5.（2022·黑龙江模拟·★★）数学家华罗庚倡导的“0.618 优选法”在各领域都有广泛应用，0.618 就是黄金分割比$m=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$的近似值，黄金分割比还可以表示成$2\sin 18^\circ$，则$\frac{2m\sqrt{4-m^2}}{2\cos^2 27^\circ-1}=$（　　）

（A）4　（B）$\sqrt{5}+1$　（C）2　（D）$\sqrt{5}-1$

答案：A

解析：由题意，$\frac{2m\sqrt{4-m^2}}{2\cos^2 27^\circ-1}=\frac{4\sin 18^\circ\sqrt{4-4\sin^2 18^\circ}}{\cos 54^\circ}=\frac{4\sin 18^\circ\sqrt{4\cos^2 18}}{\cos 54^\circ}=\frac{8\sin 18^\circ\cos 18^\circ}{\cos 54^\circ}$

$=\frac{4\sin 36^\circ}{\cos 54^\circ}=\frac{4\sin(90^\circ-54^\circ)}{\cos 54^\circ}=\frac{4\cos 54^\circ}{\cos 54^\circ}=4$.

6.（2023·新高考Ⅰ卷·★★★）已知$\sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{3}$，$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{6}$，则$\cos(2\alpha+2\beta)=$（　　）

（A）$\frac{7}{9}$　（B）$\frac{1}{9}$　（C）$-\frac{1}{9}$　（D）$-\frac{7}{9}$

答案：B

解析：只要求出$\cos(\alpha+\beta)$或$\sin(\alpha+\beta)$，就能用二倍角公式算$\cos(2\alpha+2\beta)$. 而对于条件的处理，要么展开，要么整体分析角的关系，此处由于有$\cos\alpha\sin\beta$，故展开，

由题意，$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{3}$ ①，

又$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{6}$，代入①可求得$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}$，

所以$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$，

故$\cos(2\alpha+2\beta)=1-2\sin^2(\alpha+\beta)=1-2\times(\frac{2}{3})^2=\frac{1}{9}$.

7.（2022·常州模拟·★★★）已知$a=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 1^\circ-\sin 1^\circ)$，$b=\frac{1-\tan^2 22.5^\circ}{1+\tan^2 22.5^\circ}$，$c=\sin 22^\circ\cos 24^\circ+\cos 22^\circ\sin 24^\circ$，则 a、b、c 的大小关系为（　　）

（A）$b>a>c$　（B）$c>b>a$　（C）$c>a>b$　（D）$b>c>a$

答案：B

解析：观察发现 a，b，c 的式子都可化简，故先化简，

由题意，$a=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 1^\circ-\sin 1^\circ)=\sin 45^\circ\cos 1^\circ-\cos 45^\circ\sin 1^\circ=\sin(45^\circ-1^\circ)=\sin 44^\circ$，

$$b=\frac{1-\tan^2 22.5^\circ}{1+\tan^2 22.5^\circ}=\frac{1-\dfrac{\sin^2 22.5^\circ}{\cos^2 22.5^\circ}}{1+\dfrac{\sin^2 22.5^\circ}{\cos^2 22.5^\circ}}=\frac{\cos^2 22.5^\circ-\sin^2 22.5^\circ}{\cos^2 22.5^\circ+\sin^2 22.5^\circ}=\cos^2 22.5^\circ-\sin^2 22.5^\circ=\cos 45^\circ=\sin 45^\circ，$$

$c=\sin 22^\circ\cos 24^\circ+\cos 22^\circ\sin 24^\circ=\sin(22^\circ+24^\circ)=\sin 46^\circ$，

因为 $y=\sin x$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上↗，所以 $\sin 46^\circ>\sin 45^\circ>\sin 44^\circ$，故 $c>b>a$.

8.（★★★）设当 $x=\theta$ 时，函数 $f(x)=\sin x-2\cos x$ 取得最大值，则 $\cos\theta=$_____.

答案：$-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

解析：先用辅助角公式，将 $f(x)$ 合并，求出其最大值，$f(x)=\sqrt{5}\sin(x+\varphi)$，所以 $f(x)_{\max}=\sqrt{5}$，

由题意，$f(\theta)=\sqrt{5}\sin(\theta+\varphi)=\sqrt{5}$，所以 $\sin(\theta+\varphi)=1$，要求 $\cos\theta$，可先由此式将 θ 求出来，

从而 $\theta+\varphi=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，故 $\theta=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}-\varphi(k\in\mathbf{Z})$，所以 $\cos\theta=\cos(2k\pi+\dfrac{\pi}{2}-\varphi)=\sin\varphi$，

由辅助角公式，$\sin\varphi=\dfrac{-2}{\sqrt{5}}=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，故 $\cos\theta=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.